

# Tutorial de Eletromagnetismo

Christine Córdula Dantas\*

*Divisão de Materiais, Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE),  
Centro Técnico Aeroespacial (CTA), Pça. Mal. Eduardo Gomes, 50,  
CEP 12.228-904 - Vila das Acácias - São José dos Campos - SP - Brazil*

(Dated: June 16, 2009)

O presente tutorial visa cobrir os fundamentos do eletromagnetismo, de forma condensada e clara. Alguns exercícios resolvidos e propostos foram incluídos. Assume-se conhecimento de eletricidade básica, derivadas parciais e integrais múltiplas.

Contents		
<b>I. Conceitos e Definições Preliminares</b>	1	2. Condutores 14
A. Carga elétrica	1	F. Ondas TE, TM e TEM 14
B. Campo elétrico, campo magnético e força de Lorentz	1	G. Teorema de Poynting 14
C. Unidades	2	<b>VI. Apêndice</b> 15
D. Densidade e corrente de carga; distribuições singulares de carga e de corrente	2	A. Sumário das Leis de Maxwell 15
E. Resistividade, Condutividade, Forma Pontual da Lei de Ohm, Lei de Joule	3	B. Algumas fórmulas úteis 15
<b>II. Leis de Maxwell no espaço livre</b>	3	<b>References</b> 15
A. Leis Integrais de Maxwell no espaço livre	4	
B. Condições de continuidade	5	<b>I. CONCEITOS E DEFINIÇÕES PRELIMINARES</b>
C. Leis Diferenciais de Maxwell no espaço livre	6	<b>A. Carga elétrica</b>
<b>III. Leis de Maxwell em meios materiais</b>	6	No sistema internacional de unidades (SI) <sup>1</sup> , adotado no presente tutorial, utiliza-se o metro [m] como unidade de comprimento, o quilograma [kg] como unidade de massa, e o segundo [s] como unidade de tempo. Para o eletromagnetismo, é necessário mais uma unidade básica de medida – para a carga elétrica. Esta unidade é denominada coulomb [C].
A. Polarização	6	
B. Magnetização	7	<i>O coulomb é a carga que, quando colocada no vácuo, a 1 m de uma carga igual, repele-a com uma força de <math>8,9874 \times 10^9</math> newtons [N].</i>
<b>IV. Miscelânea</b>	7	<i>Nota: a carga do elétron é de <math>1,6 \times 10^{-19}</math> [C].</i>
A. Teoremas úteis de campos vetoriais	7	
1. Teorema de Helmholtz	7	<b>B. Campo elétrico, campo magnético e força de Lorentz</b>
2. Campos Solenoidais e Irrotacionais	8	A qualquer região onde uma carga elétrica $q$ experimenta uma força elétrica associa-se o conceito de <i>campo elétrico</i> , que é usualmente uma função vetorial do espaço e do tempo. A força é devida presença de outras cargas na região. A intensidade do campo elétrico num dado ponto é igual força por unidade de carga colocada nesse
B. Evolução temporal dos campos	8	
C. Quasi-eletrostática e quasi-magnetostática	8	
D. As Equações de Poisson e de Laplace	9	
1. A Equação de Poisson Escalar	9	
2. A Equação de Poisson Vetorial	9	
3. A Equação de Laplace	9	
E. Propriedade dos Condutores	10	
<b>V. Ondas Eletromagnéticas</b>	10	
A. No vácuo	10	
B. Equação Geral de Onda: Eq. de Helmholtz	11	
C. Propagação, Reflexão e Transmissão em Meios Lineares	11	
D. Constante de propagação, atenuação, constante de fase, impedância	12	
E. Propagação em meios com perdas; tangente de perdas	13	
1. Dielétricos	13	

\*Electronic address: ccdantas@iae.cta.br

<sup>1</sup> As unidades são representadas entre colchetes, “[ ]”

ponto, isto é:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1)$$

Analogamente, um corpo magnetizado produz um *campo magnético* ao seu redor. Quando colocamos uma carga elétrica em repouso em um campo magnético, nenhuma força é observada sobre a carga. Mas quando esta se movimenta em uma região onde há um campo magnético, uma nova força é observada sobre a mesma, dada por:

$$\vec{F} = q \left( \vec{v} \times \mu_0 \vec{H} \right). \quad (2)$$

$\mu_0$  é uma constante dimensional chamada de *permeabilidade do vácuo* (a ser discutida adiante), e  $\vec{H}$  é a *intensidade do campo magnético*. Definiremos a *densidade do fluxo magnético no espaço livre* como:

$$\vec{B}^* = \mu_0 \vec{H}. \quad (3)$$

Note que a intensidade do campo (ou densidade do fluxo) magnético é também uma função vetorial que depende das coordenadas de posição e também pode variar no tempo.

A *força de Lorentz* é a soma vetorial das duas forças estabelecidas em (1) e (2), isto é:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \mu_0 \vec{H}). \quad (4)$$

A lei de Lorentz expressa o efeito do campo eletromagnético numa carga em movimento.

### C. Unidades

A lei de Lorentz define as unidades de  $\vec{E}$  e de  $\mu_0 \vec{H}$ , considerando a seguinte definição para a unidade derivada volt [V]:

$$[V] = \frac{[kg][m]^2}{[C][s]^2}. \quad (5)$$

Das Eqs. 1 e 5, temos:

$$[E] = \frac{[N]}{[C]} = \frac{[kg][m]/[s]^2}{[C]} = \frac{[V]}{[m]}. \quad (6)$$

E da Eq. 2, 3 e 5, temos:

$$[B^*] = [\mu_0 H] = \frac{[N]}{[C][m]/[s]} = \frac{[kg]}{[C][s]} = \frac{[V][s]}{[m]^2} \equiv [T], \quad (7)$$

onde [T] é a unidade derivada *Tesla*. Neste ponto, note que não podemos afirmar qual a unidade de H e de  $\mu_0$

TABLE I: Conversão entre unidades SI e Gaussiano (CGS) para o campo magnético.

tipo	campo	CGS	SI
fluxo	$\vec{B}$	[G]	$10^{-4}$ [T]
intensidade	$\vec{H}$	[Oe]	$\frac{10^3}{4\pi}$ [A]/[m]

separadamente. Veremos posteriormente [c.f. Eq. 29] que a unidade derivada de H é [H] = [A]/[m], onde a unidade derivada *Ampère* para a corrente elétrica é dada por: [A] = [C]/[s]. Com esta informação, e dada a Eq. 7, podemos deduzir que:

$$[\mu_0] = \frac{[T]}{[A]/[m]} = \frac{[W]}{[A][m]} = \frac{[h]}{[m]}, \quad (8)$$

onde [h] é a unidade derivada *Henry*, e [W], a unidade derivada *Weber*. O valor numérico de  $\mu_0$  é de  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  [h]/[m].

Unidades equivalentes no sistema gaussiano (ou CGS) são: para a densidade do fluxo magnético, [G] = *Gauss*; e para a intensidade do campo magnético, [Oe] = *Oersted*. Na Tab. I apresentamos a conversão entre estas unidades.

*Observação:* Além da conversão entre unidades, é possível converter fluxo em intensidade e vice-versa.

**Exercício 1:** Seja o valor da intensidade do campo magnético num ponto dado por  $\vec{H} = 1900$  [Oe]. Qual o valor da densidade de fluxo magnético  $\vec{B}$  correspondente, em unidade [T]?

*Solução:* Primeiro, devemos converter [Oe]  $\rightarrow$  [A]/[m].

$$H = 1900[Oe] = 1900 \times \frac{10^3}{4\pi}[A]/[m].$$

E então converter para fluxo:

$$\begin{aligned} B[T] &= \mu_0 \frac{[T]}{[A]/[m]} \times H[A]/[m] \\ \Rightarrow B[T] &= 4\pi \times 10^{-7} \frac{[T]}{[A]/[m]} \times 1900 \times \frac{10^3}{4\pi}[A]/[m] \\ \Rightarrow B &= 0,19[T] \end{aligned}$$

Note, portanto, que para passar de intensidade em [Oe] para fluxo em [T] basta multiplicar por  $10^{-4}$ .

### D. Densidade e corrente de carga; distribuições singulares de carga e de corrente

*Distribuições contínuas de carga* podem ser descritas utilizando-se o conceito de *densidade de carga*,  $\rho$ , que

é uma função escalar que pode depender da posição e do tempo. Seja um volume pequeno  $\Delta V$  comparado às dimensões do sistema, então:

$$\rho(\vec{r}, t) \equiv \frac{\text{carga em } \Delta V}{\Delta V} \quad (9)$$

*Distribuições singulares de carga* (ie, conceitos limites de superfície, linha e ponto) são definidas em termos de integrais: A *carga pontual*  $q$  é definida como:

$$q = \lim_{\rho \rightarrow \infty, V \rightarrow 0} \int_V \rho dV. \quad (10)$$

A *densidade linear de carga*  $\lambda_l$  é definida como:

$$\lambda_l = \lim_{\rho \rightarrow \infty, A \rightarrow 0} \int_A \rho dA. \quad (11)$$

E a *densidade superficial de carga*  $\sigma_s$  é definida como:

$$\sigma_s = \lim_{\rho \rightarrow \infty, h \rightarrow 0} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho d\lambda, \quad (12)$$

onde  $h$  é a espessura de um elemento de volume de carga. Nestas equações, os escalares  $dV$ ,  $dA$  e  $d\lambda$  são, respectivamente, elemento de volume, elemento de área e elemento de linha (com eixo de coordenadas paralelo ao vetor unitário  $\hat{n}$ , que tem direção perpendicular à superfície carregada).

A *densidade de corrente*  $\vec{J}$  é definida por:

$$\vec{J} = \rho \vec{v}, \quad (13)$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade da carga. Portanto  $\vec{J}$  mede a taxa de transporte de um elemento de carga por unidade de área:  $\vec{J} \equiv dq/(d\vec{A}dt)$ , onde o vetor  $d\vec{A}$  tem módulo igual ao elemento de área  $dA$  e direção normal à superfície:  $d\vec{A} = d(A\hat{n}) = \hat{n}dA$ .

As *distribuições singulares de corrente* são a *corrente linear*  $I$  e a *densidade superficial de corrente*  $\vec{K}$ , definidas a seguir:

$$I = \lim_{|\vec{J}| \rightarrow \infty, A \rightarrow 0} \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}; \quad (14)$$

$$\vec{K} = \lim_{|\vec{J}| \rightarrow \infty, h \rightarrow 0} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \vec{J} d\lambda. \quad (15)$$

### E. Resistividade, Condutividade, Forma Pontual da Lei de Ohm, Lei de Joule

Na teoria de circuitos elétricos, a *resistência* é dada por (*Lei de Ohm*):

$$R = \frac{V}{I}, \quad (16)$$

onde  $V$  é a *voltagem* (ver comentário após a Eq. 35) e  $I$ , a *corrente linear*. A unidade de  $R$  é [Ohm], definida como a resistência entre dois pontos de um condutor através do qual uma corrente de 1 Ampère flui como resultado de uma diferença de potencial de 1 Volt aplicado entre os dois pontos.

A *resistividade* é definida como:

$$\rho_R \equiv \frac{RA}{\lambda}, \quad (17)$$

onde  $A$  é a área e  $\lambda$  o comprimento do material, tendo portanto unidades de [Ohm][m].

A *condutividade* é definida como:

$$\sigma \equiv \frac{1}{\rho_R}, \quad (18)$$

tendo portanto unidades de [Ohm<sup>-1</sup>][m<sup>-1</sup>] ou [Siemens][m<sup>-1</sup>].

A *forma pontual da Lei de Ohm* é dada por:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (19)$$

A força diferencial exercida por um campo elétrico para mover uma carga diferencial  $\rho dV$  é dada por  $d\vec{F} = \vec{E}\rho dV$ , sendo o trabalho incremental  $dW = d\vec{F} \cdot d\vec{\lambda} = \rho dV \vec{E} \cdot d\vec{\lambda}$ . O incremento da potência dissipada é portanto:

$$dP = \frac{dW}{dt} = \rho dV \vec{E} \cdot \frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \rho dV \vec{E} \cdot \vec{v}. \quad (20)$$

Dada a Eq. 13, notamos que:

$$dP = \vec{E} \cdot \vec{J} dV. \quad (21)$$

Integrando, obtemos a *Lei de Joule*:

$$P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \int_V \sigma E^2 dV. \quad (22)$$

## II. LEIS DE MAXWELL NO ESPAÇO LIVRE

Em oposição à lei de Lorentz, que descreve o movimento de cargas a partir do campo eletromagnético, nesta seção estaremos interessados nos efeitos da existência de cargas e de seu movimento (ie, as “fontes”) sobre o campo eletromagnético. Isto é, como as fontes do campo eletromagnético, expressas em termos de cargas elétricas e densidades de corrente, dão origem ao campo elétrico e magnético. Estes efeitos são descritos pelas *Leis de Maxwell*, que podem ser formuladas em equações integrais ou diferenciais. As leis integrais podem ser usadas para determinar os campos em configurações simétricas de carga, mas para problemas mais gerais ou realísticos, é necessário o uso das leis diferenciais, aplicáveis a cada ponto do espaço.

## A. Leis Integrais de Maxwell no espaço livre

A lei de Gauss [Eq. 23] descreve como a intensidade do campo elétrico se relaciona com sua fonte, a densidade de carga.

$$\oint_A \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV \quad (23)$$

A permissividade do espaço livre  $\epsilon_0$  é uma constante empírica. Verifiquemos sua unidade. Primeiro, note que a unidade resultante do lado direito da Eq. 23 é [C], a carga elétrica dentro do volume  $V$ , cuja área (fechada) superficial é  $A$ . No lado esquerdo, temos na integral um produto escalar entre dois vetores: a *densidade do fluxo de deslocamento elétrico com no espaço livre*, definido por:

$$\vec{D}^* \equiv \epsilon_0 \vec{E}, \quad (24)$$

e o elemento de área,  $d\vec{A}$ . A unidade deste é  $[m]^2$ , e a do fluxo elétrico deverá ser, por questões dimensionais,  $[D^*] = [C]/[m]^2$ . Porém, sabemos que a dimensão de  $\vec{E}$  é  $[V]/[m]$ , logo a de  $\epsilon_0$  só pode ser  $[C]/([V][m])$ , ou, usando a unidade derivada *Farad* [F],  $[\epsilon_0] = [F]/[m]$ . O valor numérico de  $\epsilon_0$  é  $8.854 \times 10^{-12} [F]/[m]$ , ou, para facilitar os cálculos,  $10^{-9}/36\pi [F]/[m]$ .

**Exercício 2:** Derive a *Lei de Coulomb* (lei do inverso do quadrado da distância para duas cargas elétricas em repouso,  $q_1$  e  $q_2$ , situadas a uma distância  $\vec{d}_{12} = r\hat{r}_{12}$  entre si, onde  $\hat{r}_{12}$  é um vetor unitário),

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}_{12}, \quad (25)$$

a partir da lei integral de Gauss [Eq. 23], e da lei da força de Lorentz [Eq. 4].

**Solução:** Seja uma carga  $q_1$  na origem do sistema de coordenadas. Dada a simetria esférica da distribuição de carga, o campo elétrico deverá depender da coordenada radial  $r$  e independer das coordenadas angulares  $\theta$  e  $\phi$ . Avaliemos então, a integral de superfície para um raio arbitrário:

$$\oint_A \epsilon_0 \cdot d\vec{A} = \int_0^\pi \left[ \int_0^{2\pi} \epsilon_0 E_r(r \sin \theta d\phi) \right] (r d\theta) = \epsilon_0 E_r 4\pi r^2. \quad (26)$$

Como toda a carga está concentrada na origem, a integral volumétrica [Eq. 23] fornece simplesmente a carga  $q_1$ . Assim,

$$\epsilon_0 E_r 4\pi r^2 = q_1 \Rightarrow \vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (27)$$

De acordo com a Eq. 4, no local onde está  $q_2$ , o campo  $\vec{E}$  gerado pela carga  $q_1$  impõe uma força em  $q_2$  dada por:

$$\vec{F} = q_2 \vec{E} = q_2 \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \right). \quad (28)$$

Ficando assim demonstrada a lei de Coulomb.

A lei integral de Ampère [Eq. 29] descreve como a intensidade do campo magnético se relaciona com sua fonte, a densidade de corrente.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int_A \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad (29)$$

onde a superfície aberta  $A$  é cercada pelo contorno de linha  $C$ , e  $d\vec{l}$  é o elemento de linha do contorno  $C$ . É denominada de *corrente de deslocamento* o termo  $\int_A \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A}$ .

**Observação:** Note que na lei de Ampère, o campo  $\vec{H}$  aparece sem ser multiplicado pela permeabilidade do vácuo,  $\mu_0$ . Assim, fica evidente pela lei de Ampère que  $[H] = [C]/([m][s]) = [A]/[m]$ , como já mencionado anteriormente.

**Exercício 3:** Derive a *lei de conservação da carga* (ou de continuidade),

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV, \quad (30)$$

a partir da lei integral de Gauss [Eq. 23], e da lei de Ampère [Eq. 29].

**Solução:** Apliquemos a lei de Ampère para uma superfície fechada. Isto significa que o contorno vai se “fechando” até tender a zero (numa analogia onde a superfície pode ser vista como uma bolsa de pano onde o contorno é uma cordinha que a fecha). Assim, a integral de contorno vai a zero e as integrais de superfície abertas viram integrais de superfície fechadas:

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \oint_A \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (31)$$

Mas, pela [Eq. 23], a integral do segundo termo da eq. acima é dada pela integral volumétrica da carga, o que então demonstra a lei de continuidade.

**Observação:** As leis de Gauss [Eq. 23] e Ampère [Eq. 29] relacionam os campos às fontes, e estas estão relacionadas pela lei de conservação da carga [Eq. 30]. As próximas duas leis lidam apenas com campos.

A lei integral de Faraday [Eq. 32] estabelece que a circulação de  $\vec{E}$  no contorno  $C$  é determinada pela taxa de mudança temporal do fluxo magnético através da superfície limitada pelo contorno.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{A}. \quad (32)$$

**Exercício 4:** Discuta o significado de uma região onde a intensidade do campo elétrico não apresenta circulação. Que formas para o contorno  $C$  devem ser escolhidas para que a lei de Faraday seja válida neste caso? Exemplifique.

*Solução:* Pela lei de Faraday [Eq. 32], uma região onde a intensidade do campo elétrico não apresenta circulação, isto é,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (33)$$

significa que

$$\frac{d}{dt} \int_A \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (34)$$

ou seja, a taxa de mudança do fluxo magnético com o tempo é desprezível. Esta condição prevalece em sistemas quase-eletrostáticos.

O mais interessante nesta situação é o fato de que, seja qual for o contorno usado ao longo da integração do campo  $\vec{E}$  sem circulação, a Eq. 33 sempre dá zero. Isto significa que a integral de caminho (do campo  $\vec{E}$  sem circulação) entre dois pontos arbitrários independente do caminho escolhido. Chamamos de *força eletromotriz* a integral entre dois pontos  $a$  e  $b$  como sendo:

$$\epsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (35)$$

Assim, para uma região onde a intensidade do campo elétrico não apresenta circulação, a força eletromotriz independe do caminho escolhido. Neste caso, a força eletromotriz é chamada de *voltagem* entre dois pontos.

Um exemplo de uma região onde a intensidade do campo elétrico não apresenta circulação é aquela entre duas placas paralelas com densidade de carga uniforme gerando um campo elétrico estático entre as mesmas.

A lei integral de Gauss para o fluxo magnético [Eq. 36] estabelece que o fluxo magnético resultante de qualquer região delimitada por uma superfície fechada é zero.

$$\oint_A \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (36)$$

## B. Condições de continuidade

O que ocorre, por exemplo, com a intensidade do campo magnético entre dois lados de uma superfície carregada? Para lidarmos com singularidades de superfície é necessário a imposição de condições de contorno. Estas

podem ser deduzidas diretamente das Eqs. de Maxwell. Aqui iremos apenas listar estas condições.

A componente normal da densidade do fluxo de deslocamento elétrico é descontínua (sofre um “salto”) na presença de cargas na superfície que separa duas regiões ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) do campo [Eq. 37].

$$\hat{n} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_\alpha - \epsilon_0 \vec{E}_\beta) = \sigma_s. \quad (37)$$

A componente tangencial da intensidade magnética é descontínua (sofre um “salto”) na presença de uma corrente superficial que separa duas regiões ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) do campo [Eq. 38].

$$\hat{n} \times (\vec{H}_\alpha - \vec{H}_\beta) = \vec{K}. \quad (38)$$

A componente tangencial da intensidade do campo elétrico é contínua na presença de uma densidade superficial de cargas que separa duas regiões ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) do campo [Eq. 39].

$$\hat{n} \times (\vec{E}_\alpha - \vec{E}_\beta) = 0. \quad (39)$$

A componente normal do fluxo magnético é contínua entre duas regiões ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) do campo [Eq. 40].

$$\hat{n} \cdot (\mu_0 \vec{H}_\alpha - \mu_0 \vec{H}_\beta) = 0. \quad (40)$$

A componente normal da densidade de corrente é descontínua entre duas regiões ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) do campo somente se a densidade superficial de cargas mudar com o tempo [Eq. 41].

$$\hat{n} \cdot (\vec{J}_\alpha - \vec{J}_\beta) = -\frac{\partial \sigma_s}{\partial t}. \quad (41)$$

**Exercício 5:** Deduza todas as equações de continuidade desta seção.

### C. Leis Diferenciais de Maxwell no espaço livre

Utilizaremos dois teoremas úteis para passarmos das leis integrais para as leis diferenciais de Maxwell.

*O teorema integral de Gauss estabelece a correspondência entre a integral de uma área fechada arbitrária de um campo e a integral volumétrica (limitada por esta área) do divergente do mesmo campo [Eq. 42].*

$$\oint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV. \quad (42)$$

*O teorema integral de Stokes estabelece a correspondência entre a integral de um contorno fechado arbitrário de um campo e a integral de superfície (limitada por este contorno) do rotacional do mesmo campo [Eq. 43].*

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A}. \quad (43)$$

Apresentaremos, sem demonstração, as leis diferenciais de Maxwell, que são obtidas diretamente dos teoremas das Eqs. 42 e 43.

A lei de Gauss:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} &= \rho \\ \text{ou} \\ \nabla \cdot \vec{D}^* &= \rho. \end{aligned} \quad (44)$$

A lei de Ampère:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}}{\partial t} \\ \text{ou} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}^*}{\partial t}. \end{aligned} \quad (45)$$

A lei de Faraday:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \mu_0 \vec{H}}{\partial t} \\ \text{ou} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t}. \end{aligned} \quad (46)$$

A lei de Gauss para o campo magnético:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mu_0 \vec{H} &= 0 \\ \text{ou} \\ \nabla \cdot \vec{B}^* &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Por fim, a equação de continuidade (ou conservação de carga), em forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (48)$$

---

**Exercício 6:** Deduza as leis diferenciais de Maxwell e a lei diferencial de continuidade de carga a partir das correspondentes leis integrais, utilizando os teoremas de Gauss e de Stokes.

---

## III. LEIS DE MAXWELL EM MEIOS MATERIAIS

### A. Polarização

Definamos a densidade de carga total como constituída de duas componentes,

$$\rho = \rho_{\text{livre}} + \rho_{\text{par}}, \quad (49)$$

onde o primeiro termo se refere a cargas que podem se mover livremente de um sítio atômico a outro, como num condutor; e o segundo termo se refere a *cargas emparelhadas*, como num material composto por átomos, moléculas ou grupos de moléculas (domínios), no qual a presença de um campo elétrico induz *momentos de dipolo elétricos*, definidos por:

$$\vec{p} = q\vec{d}, \quad (50)$$

onde  $\vec{d}$  é a distância entre um par de cargas opostas emparelhadas.

A *densidade de polarização* é definida por:

$$\vec{P} \equiv Nq\vec{d}, \quad (51)$$

onde  $N$  é o número de partículas polarizadas por unidade de volume. Pode-se demonstrar que:

$$\rho_{\text{par}} = -\nabla \cdot \vec{P}. \quad (52)$$

---

**Exercício 7:** Deduza a Eq. 52.

*Solução:* Seja um meio contendo cargas emparelhadas. Por definição, a carga total efetiva deste meio, num volume arbitrário  $V$  é dada por:

$$Q_{\text{par}} = \int_V \rho_{\text{par}} dV. \quad (53)$$

Uma segunda maneira de calcular isto é considerando um elemento de área da superfície desta região. Na vizinhança deste elemento de área, todos os centros de carga positiva estão para fora da superfície do elemento de volume  $dV = \vec{d} \cdot d\vec{A}$ , com os centros de carga negativa para a parte de dentro da superfície. Estes contribuem com

uma carga efetiva negativa para  $V$ . Existem  $N\vec{d} \cdot d\vec{A}$  destes centros em  $dV$ , logo a carga efetiva em  $V$  é dada pela integral:

$$Q_{par} = - \oint_A qN\vec{d} \cdot d\vec{A} = - \oint_A \vec{P} \cdot d\vec{A}. \quad (54)$$

Igualando a eq. acima com a anterior, e usando o teorema de Gauss [Eq. 42], temos que:

$$\int_V \rho_{par} dV = - \oint_A \vec{P} \cdot d\vec{A} = - \int_V \nabla \cdot \vec{P} dV. \quad (55)$$

Dada a arbitrariedade do volume de integração, os integrandos da eq. acima são portanto idênticos, o que prova a Eq. 52.

Definamos a *densidade do fluxo de deslocamento elétrico em meios materiais* como:

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}^* + \vec{P}. \quad (56)$$

Tomando o divergente da equação acima, e levando em conta as Eqs. 44 e 52, temos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} \\ &= \rho - \rho_{par} \\ &= \rho_{livre} \end{aligned} \quad (57)$$

A condição de continuidade da componente normal do campo  $\vec{D}$  é dada por:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_\alpha - \vec{D}_\beta) = \sigma_s^{livre} \quad (58)$$

Se o meio material for *eletricamente linear e isotrópico*, então há uma relação linear entre  $\vec{P}$  e  $\vec{E}$ :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad (59)$$

onde  $\chi_e$  é a *susceptibilidade dielétrica*, donde escrevemos:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (60)$$

com a *permissividade do material* definida como:

$$\epsilon \equiv \epsilon_0(1 + \chi_e). \quad (61)$$

## B. Magnetização

As fontes do campo magnético em meios materiais são dipolos magnéticos (mais ou menos alinhados) de elétrons individuais ou correntes causadas por elétrons “circulantes”. Faremos a seguinte identificação do *momento de dipolo magnético*  $\vec{m}$  com o momento de dipolo elétrico definido na seção anterior:

$$\vec{p} \leftrightarrow \mu_0 \vec{m}. \quad (62)$$

Assim, em completa analogia com a seção anterior, temos:

A *densidade de magnetização*:

$$\vec{M} = N\vec{m}. \quad (63)$$

A *densidade de carga magnética*:

$$\rho_m \equiv -\nabla \cdot \mu_0 \vec{M}. \quad (64)$$

A *lei de Gauss para o campo magnético em meios materiais*:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mu_0 \vec{H} &= \rho_m \\ \text{ou} \\ \nabla \cdot \vec{B}^* &= -\nabla \cdot \mu_0 \vec{M} \\ \text{ou} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \end{aligned} \quad (65)$$

onde

$$\vec{B} \equiv \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \vec{B}^* + \mu_0 \vec{M} \quad (66)$$

é a *densidade de fluxo magnético em meios materiais*.

A lei de Faraday em meios materiais é escrita como:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (67)$$

E a lei de Ampère em meios materiais,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (68)$$

Analogamente, a condição de continuidade da componente normal do campo  $\vec{B}$  é dada por:

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_\alpha - \vec{B}_\beta) = 0. \quad (69)$$

No caso de meios *linearmente magnetizados*:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad (70)$$

onde  $\chi_m$  é a *susceptibilidade magnética*. Assim, podemos definir neste caso:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (71)$$

com

$$\mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m), \quad (72)$$

onde  $\mu$  é a *permeabilidade do material*.

## IV. MISCELÂNEA

### A. Teoremas úteis de campos vetoriais

#### 1. Teorema de Helmholtz

Dados o divergente e o rotacional de um campo vetorial  $\vec{F}(\vec{r})$ ,

$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = D(\vec{r}), \quad (73)$$

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{C}(\vec{r}), \quad (74)$$

podemos determiná-lo univocamente?

A resposta é *sim* (Teorema de Helmholtz), desde que, para  $r \rightarrow \infty$ : (i)  $D(\vec{r})$  e  $\vec{C}(\vec{r})$  ambos forem a zero mais rapidamente do que  $1/r^2$ , e (ii)  $\vec{F}(\vec{r})$  for a zero. Neste caso:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) = & \nabla \left( -\frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{D(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right) + \\ & + \nabla \times \left( \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right). \end{aligned} \quad (75)$$

## 2. Campos Solenoidais e Irrotacionais

Campos solenoidais são aqueles sem divergente:

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0; \quad (76)$$

e campos irrotacionais são aqueles sem rotacional:

$$\nabla \times \vec{F} = 0. \quad (77)$$

**Teorema para Campos Solenoidais:** As condições a seguir são equivalentes:

1.  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$  em todo o espaço.
2.  $\int_A \vec{F} \cdot d\vec{A}$  independe da superfície.
3.  $\oint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0$  para qualquer superfície fechada.
4.  $\vec{F} = \nabla \times \vec{W}$ , onde  $\vec{W}$  é dito *potencial vetorial* do campo  $\vec{F}$ . O campo  $\vec{W}$  não é único, pois tomando-se  $\vec{W}' \rightarrow \vec{W} + \nabla \Phi(\vec{r})$ , temos que  $\nabla \times \vec{W}' = \nabla \times \vec{W}$ , uma vez que  $\nabla \times \nabla \Phi(\vec{r}) = 0$ .

**Teorema para Campos Irrotacionais:** As condições a seguir são equivalentes:

1.  $\nabla \times \vec{F} = 0$  em todo o espaço.
2.  $\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$  independe do caminho.
3.  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$  para qualquer contorno fechado.
4.  $\vec{F} = -\nabla \Phi(\vec{r})$ , onde  $\Phi(\vec{r})$  é dito *potencial escalar* do campo  $\vec{F}$ . O campo  $\Phi(\vec{r})$  não é único, pois tomando-se  $\Phi(\vec{r})' \rightarrow \Phi(\vec{r}) + b$ , onde  $b$  é uma constante, temos que  $\nabla \Phi(\vec{r})' = \nabla \Phi(\vec{r})$ , uma vez que  $\nabla b = 0$ .

## B. Evolução temporal dos campos

Suponha que num determinado instante,  $t = t_0$ , são fornecidos os campos para todo o espaço:  $\vec{E}(\vec{r}, t_0)$ ,

$\vec{H}(\vec{r}, t_0)^2$  e  $\vec{v}(\vec{r}, t_0)$ , onde estamos considerando uma região com partículas de massa  $m$ , velocidade  $\vec{v}$  e carga  $q$  no vácuo. Segue que, pela lei de Gauss [Eq. 44], a distribuição de densidade de carga fica determinada para este tempo:

$$\rho(\vec{r}, t_0) = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t_0). \quad (78)$$

Também segue que a densidade de corrente também (c.f. Eq. 13):

$$\vec{J}(\vec{r}, t_0) = \rho(\vec{r}, t_0) \vec{v}(\vec{r}, t_0). \quad (79)$$

As leis de Faraday [Eq. 46] e de Ampère [Eq. 45] podem ser re-escritas como:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Big|_{(\vec{r}, t_0)} = -\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t_0)); \quad (80)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Big|_{(\vec{r}, t_0)} = \frac{1}{\epsilon_0} [\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t_0) - \vec{J}(\vec{r}, t_0)]. \quad (81)$$

Isto significa que  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  e  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  também ficam determinados em  $t = t_0$ .  $\frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{(\vec{r}, t_0)}$  também fica determinado de acordo com a lei de Lorentz [Eq. 4]. Para um instante seguinte,  $t = t_0 + \Delta t$ , os campos evoluem de acordo com:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}(\vec{r}, t_0) + \Delta t \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \Big|_{(\vec{r}, t_0)}, \quad (82)$$

onde  $\vec{F}$  simboliza qualquer um dos  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  ou  $\vec{v}$ .

## C. Quasi-eletrostática e quasi-magnetostática

Se desprezarmos a corrente de deslocamento lei de Ampère,  $\frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}}{\partial t} \sim 0$  [c.f. Eq. 45] ( $\Rightarrow$  *quasi-magnetostática*), ou a indução magnética da lei de Faraday,  $\frac{\partial \mu_0 \vec{H}}{\partial t} \sim 0$  [c.f. Eq. 46] ( $\Rightarrow$  *quasi-eletrostática*), quaisquer efeitos de onda eletromagnética também são desprezíveis, visto que a onda é originária de um acoplamento entre aqueles dois termos.

Em casos quasi-estáticos, dadas as fontes em um determinado instante de tempo, os campos no mesmo instante de tempo são determinados sem relação com o estado das fontes num instante anterior. Figurativamente, um retrato da distribuição das fontes determina a distribuição dos campos no mesmo instante de tempo.

<sup>2</sup> Note que, de acordo com a lei de Gauss para o campo magnético [c.f. Eq. 47],  $\vec{H}$  precisa ser solenoidal e assim permanecerá durante toda a evolução.



## D. As Equações de Poisson e de Laplace

### 1. A Equação de Poisson Escalar

Se  $\nabla \times \vec{E} = 0$  (regime quasi-eletrostático, [c.f. Eq. 46]), temos que  $\vec{E}$  pode ser escrito como (c.f. “teorema para campos irrotacionais”):

$$\vec{E} = -\nabla\Phi. \quad (83)$$

Tomando o divergente da eq. anterior e dada a lei de Gauss [c.f. Eq. 44], temos que:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (84)$$

chamada *Eq. de Poisson escalar*. Em problemas onde a distribuição de cargas é dada, a avaliação de um campo quasi-estático é equivalente portanto à avaliação de uma sucessão de campos estáticos.

Devido à linearidade da eq. de Poisson, a mesma obedece ao *princípio da superposição*, isto é, dadas, por exemplo,  $\rho_a$  e  $\rho_b$ , temos que:  $\rho_a + \rho_b \Rightarrow \Phi_a + \Phi_b$ .

Um volume elementar de carga na posição  $\vec{r}'$  dá origem a um potencial na posição  $\vec{r}$ , cuja solução da Eq. 84 (com condições de contorno apropriadas) é dada por:

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (85)$$

### 2. A Equação de Poisson Vetorial

Dada a lei de Gauss para o campo magnético [c.f. Eq. 47],  $\nabla \cdot \mu_0 \vec{H} = 0$ , temos que (c.f. “teorema para campos solenoidais”):

$$\mu_0 \vec{H} = \nabla \times \vec{A}. \quad (86)$$

Por conveniência, escolhamos o *calibre de Coulomb*:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (87)$$

Assim, a lei de Ampère [c.f. Eq. 45] para o regime quasi-magnetostático fica:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}. \quad (88)$$

Usando as Eqs. 157 e 87, temos a *eq. de Poisson vetorial*:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (89)$$

Na verdade, são três equações de Poisson escalares, uma para cada componente de  $\vec{A}$ . A solução da equação de Poisson vetorial (com condições de contorno apropriadas) é dada por (também obedecendo ao princípio da superposição):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (90)$$

**Observação:** Se tormarmos o divergente da lei de Ampère para campos quasi-magnetostáticos, notamos que  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0 = \nabla \cdot \vec{J}$  [c.f. Eq. 155], portanto as distribuições de corrente neste caso são solenoidais.

### 3. A Equação de Laplace

É simplesmente dada quando  $\rho = 0$  (não em todo espaço, pois neste caso teríamos simplesmente  $V = 0$  em todo espaço; no caso em questão estamos interessados em  $\rho = 0$  numa dada região, havendo cargas em outras regiões):

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad (91)$$

Soluções da Eq. de Laplace são ditas “funções harmônicas”. Possuem as seguintes propriedades (aqui citadas para o caso 3D, com comportamento análogo para 2D, 1D):

- O valor de  $\Phi$  num ponto  $P$  é dado pelo valor médio de  $\Phi$  numa superfície esférica de raio  $R$  centrada em  $P$ .
- $\Phi$  não pode ter máximos ou mínimos; valores extremos de  $\Phi$  ocorrem nos contornos da região.

**Primeiro teorema da unicidade:** A solução da Eq. 91 em uma dada região é unicamente determinada se  $\Phi$  é uma função com valores especificados em todos os contornos da região.

---

**Exercício 8:** Demonstre o teorema anterior.

**Solução:** Imagine uma região vazia cercada por uma superfície fechada. Imagine que existam duas soluções diferentes para o potencial,  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ , porém ambas possuindo os mesmos valores na superfície,  $\Phi_1(S) = \Phi_2(S)$ . Tome  $\Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_2$ . Note que:  $\nabla^2\Phi_3 = \nabla^2\Phi_1 - \nabla^2\Phi_2 = 0$ , pois  $\nabla^2\Phi_1 = 0 = \nabla^2\Phi_2$  (são soluções da Eq. de Laplace). Consequentemente,  $\Phi_3$  também obedece à Eq. de Laplace, e mais, tem o valor zero na superfície:  $\Phi_3(S) = 0$ , pois  $\Phi_3(S) = \Phi_1(S) - \Phi_2(S) = 0$ . Mas como não é permitido máximos e mínimos, exceto na superfície, e na mesma o valor de  $\Phi_3$  é zero, segue que  $\Phi_3 = 0$  em toda parte, e portanto  $\Phi_1 = \Phi_2$ .

---

**Corolário:** O potencial  $\Phi$  numa dada região é univocamente determinado se: (a) a densidade de carga na região, e (b) o valor de  $\Phi$  em todos os contornos, são especificados. (A prova segue de maneira inteiramente análoga ao exercício anterior).

**Observação:** Quando a distribuição de cargas é fornecida em *toda o espaço*, a integral de superposição [c.f. Eq. 85] pode ser usada para determinar o potencial que satisfaça a Eq. de Poisson [Eq. 84]. No entanto, há casos onde a região de interesse é *limitada* por superfícies onde o potencial precisa satisfazer condições de contorno especificadas (equipotenciais). Os teoremas de unicidade podem ser usados para se obter a solução para o potencial, pois garantem que somente um potencial para as dadas condições de contorno especificadas pode existir. Técnicas como o “método das imagens” podem ser usadas para este fim. Essencialmente, consiste

em substituir o problema por outro inteiramente diferente, onde se tenta descobrir que distribuição de cargas, externas à região de interesse, faz com que o potencial resultante gere a mesmas condições de contorno do problema original. Pelo teorema da unicidade, o potencial equivalente assim encontrado tem que ser igual ao do problema original. Um segundo método para resolver as Eqs. de Laplace e Poisson, mais direto, é o da “separação de variáveis”. É aplicável quando o potencial  $\Phi$  (ou sua derivada normal à superfície  $\partial\Phi/\partial n$ ) é especificado nos limites de uma dada região, e deseja-se encontrar o potencial no interior desta região.

### E. Propriedade dos Condutores

- $\vec{E} = 0$  no interior de um condutor. Isto é, o campo  $\vec{E}_{ind}$  gerado pelas cargas induzidas por um campo externo  $\vec{E}_0$  tende a cancelá-lo no interior do condutor.
- $\rho = 0$  no interior de um condutor [via item anterior e lei de Gauss, Eq. 44].
- Quaisquer cargas excedentes residem na superfície do condutor.
- $\Phi = \text{constante}$ , no condutor todo; a superfície de um condutor é sempre um equipotencial. Sejam  $a$  e  $b$  pontos quaisquer do condutor (no interior ou na superfície do mesmo). Temos que  $\Phi(b) - \Phi(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \Phi(a) = \Phi(b)$ .
- $\vec{E}$  é perpendicular à superfície do condutor, imediatamente do lado de fora do mesmo.

*Segundo teorema da unicidade:* Numa região contendo condutores e preenchida por uma densidade de carga especificada, o campo elétrico é univocamente determinado se a carga total em cada condutor é dada.

## V. ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

### A. No vácuo

Campos eletromagnéticos podem existir em regiões muito distantes de suas fontes porque podem se propagar como ondas eletromagnéticas, originárias do acoplamento entre  $\vec{H}$  e  $\vec{E}$ . Examinemos este acoplamento avaliando se as eqs. de Maxwell admitem como solução particular  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  perpendiculares entre si, i.e., com componentes dadas por:

$$E_x = f(z), E_y = 0, E_z = 0; \quad (92)$$

$$H_x = 0, H_y = g(z), H_z = 0. \quad (93)$$

Onde  $f(z)$  e  $g(z)$  são funções quaisquer da coordenada  $z$ . Note que ambos campos são solenoidais, de acordo com a lei de Gauss (pois  $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ ;  $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ ;  $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ , etc). Assim, não há cargas envolvidas, nem densidades de corrente. Note também que, pela lei de Faraday [c.f. 46]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial \mu_0 H_z}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= 0, \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial \mu_0 H_x}{\partial t} \\ \Rightarrow 0 &= 0, \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial \mu_0 H_y}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial \mu_0 H_y}{\partial t}. \end{aligned} \quad (96)$$

Analogamente, pela lei de Ampère [c.f. 45]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{\partial \epsilon_0 E_z}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial H_y}{\partial x} &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= 0, \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{\partial \epsilon_0 E_x}{\partial t} \\ \Rightarrow -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{\partial \epsilon_0 E_x}{\partial t} \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \frac{\partial \epsilon_0 E_y}{\partial t} \\ \Rightarrow 0 &= 0. \end{aligned} \quad (99)$$

Tomando  $\frac{\partial}{\partial z}$  (Eq. 96), temos:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \mu_0 H_y}{\partial z \partial t}. \quad (100)$$

E tomando  $\frac{\partial}{\partial t}$  (Eq. 98), temos:

$$-\frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_0 E_x}{\partial t^2}. \quad (101)$$

Multiplicando a Eq. 101 por  $\mu_0$  e inserindo na Eq. 100, e notando que  $\frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t}$ , temos:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \quad (102)$$

que é uma equação de onda movendo-se na direção  $z$  com a *velocidade da luz*:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \simeq 3 \times 10^8 \text{ [m]/[s]}. \quad (103)$$

Num procedimento semelhante, encontramos também:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}. \quad (104)$$

Qual a relação entre as amplitudes  $E_x$  e  $H_y$ ? Note que podemos utilizar para as funções  $f(z)$  e  $g(z)$  formas sinusoidais, pois qualquer onda pode ser expressa como uma combinação linear de ondas sinusoidais, sendo esta combinação também uma solução para a equação de onda. Logo podemos confinar nossa atenção para ondas sinusoidais de frequência  $\omega$  e número de onda  $k$ . Assim,

$$\vec{E}(z, t) = E_x e^{i(kz - \omega t)} \hat{x}, \quad (105)$$

$$\mu_0 \vec{H}(z, t) = H_y e^{i(kz - \omega t)} \hat{y}. \quad (106)$$

Mas a lei de Faraday [c.f. Eqs. 46 e 96] aplicada aos campos acima impõe que:

$$kE_x = \omega \mu_0 H_y \Rightarrow \mu_0 H_y = B_y^* = \frac{1}{c} E_x. \quad (107)$$

## B. Equação Geral de Onda: Eq. de Helmholtz

Vimos na seção anterior como obter a equação de onda eletromagnética no vácuo, assumindo soluções particulares para  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ . Agora iremos deduzir a expressão geral, válida para propagação de ondas em meios materiais lineares, isotrópicos, homogêneos e invariantes no tempo, assumindo também que o meio não possui cargas livres,  $\nabla \cdot \vec{D} = 0$  [c.f. Eq. 57].

Aplicando o rotacional em ambos os lados da lei de Faraday [c.f. 46], temos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}). \quad (108)$$

Usando a lei de Ohm [Eq. 19] e inserindo a lei de Ampère [c.f. 45] na equação anterior, temos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (109)$$

Usando a relação 157, e notando que o meio é livre de cargas, obtemos finalmente a *Equação de Onda de Helmholtz* para o campo  $\vec{E}$ :

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (110)$$

Uma expressão similar pode ser obtida para o campo  $\vec{H}$ . Note que no vácuo,  $\sigma = 0$ , donde recuperamos a Eq. 102.

## C. Propagação, Reflexão e Transmissão em Meios Lineares

Em meios lineares (homogêneos, isotrópicos, com  $\epsilon$  e  $\mu$  independentes da posição e direção), a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas é dada por:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n}, \quad (111)$$

onde  $n$  é o índice de refração. Suponha que o plano  $yz$  forma uma fronteira entre dois meios (1 e 2). Uma onda plana de frequência  $\omega$ , viajando na direção  $x$  se aproxima da interface pelo lado esquerdo (meio 1):

$$\begin{aligned} \vec{E}^I(x, t) &= E_0^I e^{i(k_1 x - \omega t)} \hat{y} \\ \mu_1 \vec{H}^I(x, t) &= \frac{1}{\nu_1} \mu_1 H_0^I e^{i(k_1 x - \omega t)} \hat{z}, \end{aligned} \quad (112)$$

gerando uma onda refletida, que viaja de volta no meio 1,

$$\begin{aligned} \vec{E}^R(x, t) &= -E_0^R e^{i(k_1 x - \omega t)} \hat{y} \\ \mu_1 \vec{H}^R(x, t) &= -\frac{1}{\nu_1} \mu_1 H_0^R e^{i(k_1 x - \omega t)} \hat{z}, \end{aligned} \quad (113)$$

e uma transmitida, que atravessa para o lado direito (meio 2):

$$\begin{aligned} \vec{E}^T(x, t) &= E_0^T e^{i(k_2 x - \omega t)} \hat{y} \\ \mu_2 \vec{H}^T(x, t) &= \frac{1}{\nu_2} \mu_2 H_0^T e^{i(k_2 x - \omega t)} \hat{z}. \end{aligned} \quad (114)$$

Em  $x = 0$ , os campos da esquerda conjuntamente devem se unir aos da direita, de acordo com as condições de contorno [c.f. seção sobre condições de continuidade e dedução para meios lineares]. Como os campos não possuem componentes perpendiculares à superfície de interface, temos que estas condições são apenas para as componentes tangenciais [compare com as Eqs. 39 e 38, como referência]:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= 0 \Rightarrow \vec{E}_1^{\parallel} = \vec{E}_2^{\parallel} \\ \Rightarrow E_0^I + E_0^R &= E_0^T, \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= \vec{K} = 0 \Rightarrow \vec{H}_1^{\parallel} = \vec{H}_2^{\parallel} \\ \Rightarrow \frac{1}{\mu_1} \left( \frac{1}{\nu_1} E_0^I - \frac{1}{\nu_1} E_0^R \right) &= \frac{1}{\mu_2} \left( \frac{1}{\nu_2} E_0^T \right) \\ \Rightarrow E_0^I - E_0^R &= \beta E_0^T, \end{aligned} \quad (116)$$

com  $\beta = (\mu_1 \nu_1) / (\mu_2 \nu_2)$ . Como  $\mu_1 \sim \mu_0 \sim \mu_2$ , podemos assumir  $\beta = \nu_1 / \nu_2$ , o que nos dá as soluções:

$$E_0^R = \left( \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_2 + \nu_1} \right) E_0^I ; E_0^T = \left( \frac{2\nu_2}{\nu_2 + \nu_1} \right) E_0^I. \quad (117)$$

Como a intensidade  $I$  é proporcional à amplitude da onda ao quadrado, pela expressão  $I = \frac{\epsilon}{2} E_0^2$ , temos que o *coeficiente de reflexão* é dado por:

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \left( \frac{E_0^R}{E_0^I} \right)^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad (118)$$

e o *coeficiente de transmissão*:

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 \nu_2}{\epsilon_1 \nu_1} \left( \frac{E_0^T}{E_0^I} \right)^2 = \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (119)$$

Note que  $R + T = 1$ , tal como requerido pela conservação de energia.

#### D. Constante de propagação, atenuação, constante de fase, impedância

Consideremos campos harmônicos no tempo, e.g.,

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re} \left[ \vec{E}_0(x, y, z) e^{i(\omega t + \phi)} \right] = \text{Re} \left[ \vec{E}_s e^{i(\omega t)} \right], \quad (120)$$

com fasor definido por  $\vec{E}_s \equiv \vec{E}_0(x, y, z) e^{i\phi}$ , onde  $\phi$  é o deslocamento de fase. Dado que  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}_s$  e  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = (i\omega)^2 \vec{E}_s$ , e que as derivadas espaciais dependem apenas de  $\vec{E}_s$ , a equação de Helmholtz nos fornece [c.f. 110]:

$$\nabla^2 \vec{E}_s - \gamma^2 \vec{E}_s = 0, \quad (121)$$

com a *constante de propagação* definida por

$$\gamma = \sqrt{i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)} = \alpha + i\beta, \quad (122)$$

onde  $\alpha$  é dita *atenuação* da onda (unidades de [Nepers][m]<sup>-1</sup>), e  $\beta$  é a *constante de fase*<sup>3</sup> (unidades de [rad][m]<sup>-1</sup>). Uma expressão similar é obtida para campos magnéticos,

$$\nabla^2 \vec{H}_s - \gamma^2 \vec{H}_s = 0. \quad (123)$$

Considerando uma onda plana polarizada na direção  $x$  e se propagando na direção  $z$ , i.e,  $\vec{E}_s(z) = E_{x,s}(z)\hat{x}$ , pode-se mostrar que a solução geral para  $\vec{E}_s$  é dada pela superposição linear:

$$\vec{E}_s = (E_0^+ e^{-\gamma z} + E_0^- e^{+\gamma z}) \hat{x}. \quad (124)$$

E, pela lei de Faraday [c.f. 46], também nota-se facilmente que

$$\nabla \times \vec{E}_s = -i\omega\mu \vec{H}_s \rightarrow \vec{H}_s = -\frac{\nabla \times \vec{E}_s}{i\omega\mu}. \quad (125)$$

Resolvendo o rotacional acima, obtemos:

$$\vec{H}_s = \left( \frac{\gamma E_0^+}{i\omega\mu} e^{-\gamma z} - \frac{\gamma E_0^-}{i\omega\mu} e^{+\gamma z} \right) \hat{y}. \quad (126)$$

A *impedância intrínseca* do meio é definida como:

$$\eta \equiv \frac{E_0^+}{H_0^+} = \frac{i\omega\mu}{\gamma}. \quad (127)$$

De acordo com a definição 122, obtemos:

$$\eta = \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma + i\omega\epsilon}}. \quad (128)$$

Note que, no espaço livre, ou vácuo, não há cargas e a condutividade é nula ( $\sigma = 0$ ). Logo, a constante de propagação [Eq. 122] fica:

$$\gamma = \sqrt{i\omega\mu(0 + i\omega\epsilon)} = i\omega\sqrt{\mu\epsilon} = \alpha + i\beta, \quad (129)$$

donde  $\alpha = 0$  (o sinal não atenua ao se propagar) e  $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ . Esta condição vale para qualquer meio sem perdas, não somente o vácuo, mas como também para um *dielétrico perfeito*. Note que esta expressão concorda com a velocidade de propagação da onda dada pela Eq. 111:

$$\nu = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (130)$$

Para o vácuo, vimos que a velocidade de propagação é a velocidade da luz [c.f. Eq. 103].

Para um dielétrico perfeito e não-magnético (i.e.,  $\mu_r = \mu/\mu_0 = 1$ ), temos:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}. \quad (131)$$

Neste caso, a impedância intrínseca é dada por [c.f. Eq. 128]:

$$\eta = \sqrt{\frac{i\omega\mu}{0 + i\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad (132)$$

ou seja, um valor real. Reescrevendo a equação acima como:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\epsilon_r\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \eta_0, \quad (133)$$

obtemos a impedância intrínseca do espaço livre:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7} [\text{H}][\text{m}]^{-1}}{(10^{-9}/36\pi) [\text{F}][\text{m}]^{-1}}} = 120\pi [\text{Ohm}]. \quad (134)$$

Por fim, uma pequena observação quanto a razão das amplitudes dos campos, tal como expressa pela Eq. 127. Note as seguintes fórmulas úteis:

$$\vec{H}_s = \frac{1}{\eta} \hat{u} \times \vec{E}_s \quad (135)$$

$$\vec{E}_s = -\eta \hat{u} \times \vec{H}_s \quad (136)$$

$$(137)$$

<sup>3</sup> Também conhecida como *número de onda*,  $k = 2\pi/\lambda$ .

onde  $\hat{u}$  é o vetor unitário na direção de propagação da onda. Note também que essas equações concordam com os cálculos anteriores, onde partimos de soluções particulares para os campos no espaço livre, uma vez que, facilmente se encontra pela Eq. 134 que  $\eta_0 = \mu_0 c$ . O que nos leva a concordância entre as Eqs. 107 e 127:

$$\mu_0 H_y = \frac{1}{c} E_x \rightarrow H_y = \frac{1}{\eta_0} E_x \quad (138)$$

### E. Propagação em meios com perdas; tangente de perdas

Verifiquemos as expressões das quantidades vistas na seção anterior para o caso de materiais que apresentem perdas (o sinal atenua ao se propagar no meio).

#### 1. Dielétricos

Para algumas aproximações, dielétricos podem ser tratados como dielétricos perfeitos (i.e., sem perdas), porém todos os dielétricos apresentam perdas em algum grau. A natureza das perdas tem origem em dois fenômenos (ou uma combinação destes):

- *Perdas por condutividade finita.* O campo  $\vec{E}$  gera uma corrente de condução  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  [c.f. Lei de Ohm, Eq. 19]. A presença de  $\vec{E}$  e  $\vec{J}$  gera dissipação de potência (como calor) por meio da Lei de Joule [c.f. Eq. 22]. Esta dissipação de potência atenua a onda eletromagnética.
- *Perdas por polarização.* Associadas à energia exigida pelo campo para movimentar dipolos “relutantes”. Este mecanismo é proporcional à frequência.

Consideremos a permissividade complexa como:

$$\epsilon_c = \epsilon' - i\epsilon'', \quad (139)$$

onde:

- $\epsilon'$ : parte real de  $\epsilon_c$ , i.e.,  $\epsilon' \equiv \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ .
- $\epsilon''$ : parte imaginária de  $\epsilon_c$ , que se refere às perdas por polarização.

A partir das Leis de Ohm [c.f. Eq. 19] e de Ampère [c.f. Eq. 45], aplicadas aos fasores do campo eletromagnético harmônico no tempo, obtemos:

$$\nabla \times \vec{H}_s = \sigma \vec{E}_s + i\omega(\epsilon' - i\epsilon'')\vec{E}_s, \quad (140)$$

ou

$$\nabla \times \vec{H}_s = [(\sigma + \omega\epsilon'') + i\omega\epsilon']\vec{E}_s, \quad (141)$$

onde podemos considerar uma *condutividade efetiva*,

$$\sigma_{\text{ef}} \equiv \sigma + \omega\epsilon'', \quad (142)$$

que inclui ambas as perdas (condutividade e polarização). As fórmulas para a constante de propagação [c.f. Eq. 122] e para a impedância [c.f. Eq. 128] continuam válidas, aplicando-se  $\sigma \rightarrow \sigma_{\text{ef}}$ . Note que ambas quantidades são complexas neste caso, e isso implica que a onda irá atenuar devido à  $\alpha > 0$  na constante de propagação, e haverá uma diferença de fase entre os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ .

Determinemos as expressões para  $\alpha$  e  $\beta$  para um dielétrico em geral, sem tecer considerações ainda sobre perdas. Re-arranjando a expressão 122, temos:

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon + i\omega \mu \sigma = (\alpha + i\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + i2\alpha\beta, \quad (143)$$

donde, igualando os termos reais e imaginários, e resolvendo as equações resultantes, temos:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right)} \quad (144)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1 \right)} \quad (145)$$

Ou seja, obtivemos a atenuação e a constante de fase em termos dos parâmetros constitutivos de um material dielétrico em geral. Para incluir efeitos de perda (caracterizados pela condutividade finita  $\sigma$  e a parte imaginária  $\epsilon''$ ), mais uma vez tomamos  $\sigma \rightarrow \sigma_{\text{ef}}$  nas fórmulas acima.

Note que para ondas harmônicas no tempo a densidade corrente de deslocamento da Lei de Ampère [c.f. Eq. 45] é dada por (lembrando que  $\epsilon = \epsilon'$ ):  $\vec{J}_{\text{des}} \equiv \partial \epsilon' \vec{E} / \partial t = i\omega \epsilon' \vec{E}_s$  (uma quantidade puramente imaginária), enquanto que a densidade de corrente de condução efetiva [c.f. Eq. 19] é dada por  $\vec{J}_{\text{ef}} = \sigma_{\text{ef}} \vec{E}_s$  (uma quantidade real). De acordo com a Eq. 141, temos então:

$$\nabla \times \vec{H}_s = \vec{J}_{\text{ef}} + \vec{J}_{\text{des}} = \vec{J}_{\text{tot}} \quad (146)$$

A *tangente de perdas* ( $\tan \delta$ ) é definida pela razão das componentes real e imaginária de  $\vec{J}_{\text{tot}}$ :

$$\tan \delta = \frac{\text{Re} [\vec{J}_{\text{tot}}]}{\text{Imag} [\vec{J}_{\text{tot}}]} = \frac{\sigma + \omega \epsilon''}{\omega \epsilon'} = \frac{\sigma_{\text{ef}}}{\omega \epsilon'}. \quad (147)$$

O ângulo  $\delta$  portanto fornece, no plano complexo, o ângulo no qual  $\vec{J}_{\text{des}}$  está adiantada com relação à  $\vec{J}_{\text{tot}}$ . Note também que a tangente de perdas varia com a frequência. Alguns casos a se considerar:

- “*Bom*” dielétrico (perdas baixas):  $\sigma \rightarrow 0$ , logo  $\tan \delta \approx \epsilon''/\epsilon'$ . Ou ainda, de maneira geral,  $\tan \delta \ll 1$ , i.e.,  $\sigma_{\text{ef}}/\omega \epsilon' \ll 1$ . Podemos utilizar a aproximação  $(1+x)^n \approx 1+nx$  para  $x = \sigma/\omega \epsilon$  nas Eqs. 144 e 145, obtendo fórmulas mais simples:  $\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  e  $\beta \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ .

- “Bom” condutor:  $\sigma \gg \omega\epsilon'$  (excetuando em frequências suficientemente elevadas), resultando na aproximação  $\tan\delta \approx \sigma/\omega\epsilon'$ . Trataremos mais em detalhes de condutores na próxima seção.

## 2. Condutores

Vimos que para condutores  $\sigma \gg \omega\epsilon$ , o que nos fornece as seguintes aproximações para  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\sigma}. \quad (148)$$

A impedância intrínseca recebe a seguinte aproximação:

$$\eta \approx \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma}}. \quad (149)$$

Notando a identidade  $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$ , e aplicando a fórmula de Euler [c.f. Eq. 154], a aproximação anterior pode ser re-escrita como:

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+i) = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{i45^\circ} = \sqrt{2}\frac{\alpha}{\omega}e^{i45^\circ}. \quad (150)$$

O campo magnético se encontra defasado em relação ao campo elétrico em  $45^\circ$ . Uma consequência de  $\sigma$  grande é a redução drástica na velocidade de propagação  $\nu = \omega/\beta \approx \sqrt{(2\omega)/(\mu\sigma)}$  e no comprimento de onda  $\lambda = 2\pi/\beta \approx 2\sqrt{\pi/(f\mu\sigma)}$ . Uma grande atenuação significa que a maior parte da energia da onda incidente em um condutor será refletida, e os campos terão uma pequena profundidade de penetração no material.

## F. Ondas TE, TM e TEM

Ondas eletromagnéticas confinadas em um condutor cilíndrico oco (*guia de onda*) não são geralmente transversas, havendo componentes longitudinais. Isto ocorre devido às condições de contorno no interior da parede interna do condutor. Pode-se demonstrar que, para uma onda eletromagnética propagando, por exemplo, na direção  $x$  ao longo do condutor, as Eqs. de Maxwell conjuntamente com as condições de contorno ( $\vec{E}_{\parallel} = 0$  e  $\vec{B}_{\perp}^* = 0$ ) geram um par de equações desacopladas para as componentes longitudinais  $E_x$  e  $B_x^*$ . Se  $E_x = 0$ , as ondas eletromagnéticas são ditas *TE* (“transverse electric”) e se  $B_x^* = 0$ , são ditas *TM* (“transverse magnetic”). Se ambas condições ocorrerem,  $E_x = 0$  e  $B_x^* = 0$ , são ditas ondas *TEM*. Pode-se demonstrar que ondas TEM não podem ocorrer em um guia de onda oco.

## G. Teorema de Poynting

O *Teorema de Poynting* afirma que a taxa de decréscimo da energia armazenada nos campos elétricos

e magnéticos de um volume, menos a energia dissipada pelo calor, tem que ser igual à potência que deixa a superfície fechada que limita este volume. A expressão é (assumindo um meio linear, isotrópico e invariante no tempo):

$$\oint_A (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} = - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} \mu H^2 dV. \quad (151)$$

Trata-se portanto de uma expressão para a lei de conservação da energia em eletromagnetismo, e pode ser obtida a partir das Eqs. de Maxwell. O *vetor de Poynting* instantâneo é dado por:

$$\vec{P} \equiv \vec{E} \times \vec{H}. \quad (152)$$

Representa a densidade e a direção do fluxo de potência e tem unidades de [Watts][m]<sup>-2</sup>.

## VI. APÊNDICE

## A. Sumário das Leis de Maxwell

TABLE II: Leis integrais no vácuo

Gauss	$\oint_A \vec{D}^* \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV$
Ampère	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int_A \vec{D}^* \cdot d\vec{A}$
Faraday	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}^* \cdot d\vec{A}$
Gauss Campo Mag.	$\oint_A \vec{B}^* \cdot d\vec{A} = 0$
Cons. carga	$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$

TABLE III: Leis diferenciais no vácuo

Gauss	$\nabla \cdot \vec{D}^* = \rho$
Ampère	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}^*}{\partial t}$
Faraday	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t}$
Gauss Campo Mag.	$\nabla \cdot \vec{B}^* = 0$
Cons. carga	$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Ver as definições de  $\vec{B}^*$  e  $\vec{D}^*$  nas Eqs. 3, 24.

Em meios materiais, basta fazer as substituições abaixo usando as Eqs. 56, 66:

$$\begin{aligned} \vec{D}^* &\rightarrow \vec{D} \\ \vec{B}^* &\rightarrow \vec{B} \\ \rho &\rightarrow \rho_{livre} \end{aligned} \quad (153)$$

As substituições correspondentes para o caso de meios lineares e isotrópicos devem ser feitas usando as Eqs. 60 e 71.

## B. Algumas fórmulas úteis

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (154)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0. \quad (155)$$

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0. \quad (156)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}, \quad (157)$$

onde  $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla$ .

$$\nabla \cdot \vec{r} = 3. \quad (158)$$

$$\nabla \times \vec{r} = 0. \quad (159)$$

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \hat{r}. \quad (160)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{r^2} \hat{r} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r}). \quad (161)$$

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta^3(\vec{r}). \quad (162)$$

**Exercício 9:** Demonstre a Eq. 162 através da Eq. de Poisson [Eq. 84] para uma carga pontual.

*Solução:* O potencial elétrico de uma carga pontual é (mostre isso, usando as Eq. 27 e 83):

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (163)$$

A densidade de carga de uma carga pontual é dada por:  $\rho = q\delta^3(\vec{r})$ , o que nos dá:

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{q\delta^3(\vec{r})}{\epsilon_0}. \quad (164)$$

- 
- [1] Alonso, M. & Finn, E. J. “Física, um curso universitário”, vol. III - campos e ondas. Ed. Edgard Blücher Ltda, 5a. reimpresso, 2008.
- [2] Griffiths, D. J., “Introduction to Electrodynamics”, 2nd. Ed., Prentice-Hall, Inc., 1981.
- [3] Halliday, D. & Resnick, R. “Physics - Electromagnetism”, Wiley, 2001.
- [4] Haus, H. A. & Melcher, J. R. “Electromagnetic Fields and Energy”. Ed. Prentice-Hall International Editions, 1989.

- [5] Jackson, J. D. “Classical Electrodynamics”, Ed. John Wiley & Sons, Inc., 3a. edição, 1998.
- [6] Landau, L. D. & Lifshitz, E. M., “The Classical Theory of Fields”, Ed. Elsevier, 4a. ed., reprinted, 2007.
- [7] Mariano, W. C., “Eletromagnetismo: Fundamentos e Aplicações”, Ed. Érica, 2003.
- [8] Wentworth, S. M., “Eletromagnetismo Aplicado”, Bookman Companhia Editora, 2009.